



MATEMATYCZNIE O NIESKOŃCZONOŚCIACH

CO TO JEST NIESKOŃCZONOŚĆ?

- Coś niewyobrażalnego.
- Coś, co nie ma końca.
- Bardzo dużo!

Bardzo dużo!

1000000000000000

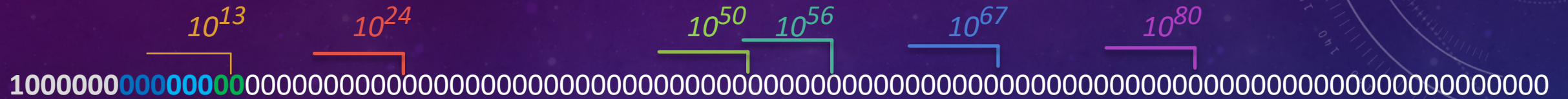
milion miliard bilion
million billion trillion



Bardzo duży!

1000000 000 000 00

milion miliard bilion



googol



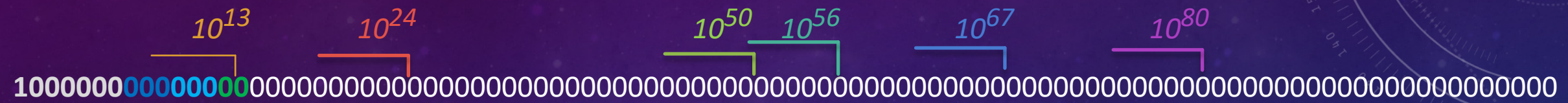
Co jest większe:

- Googol czy liczba komórek w ciele człowieka?
- Googol czy liczba atomów w ciele człowieka?
- Googol czy liczba atomów na kuli ziemskiej?
- Googol czy liczba atomów w Układzie Słonecznym?
- Googol czy liczba atomów w naszej galaktyce?
- Googol czy liczba atomów w obserwowalnym Wszechświecie?

Bardzo dużo!

1000000 000 000 000

milion miliard bilion



googol

10...0
googol zer

$N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$



Parz = 0, 2, 4, 6, 8, ...

Pierwsze = 2, 3, 5, 7, 11, ...

NParz = 1, 3, 5, 7, 9, ...



Starożytni: dowolnie daleko, dowolnie dużo

Prostą możemy przedłużać dowolnie daleko:

Euklides



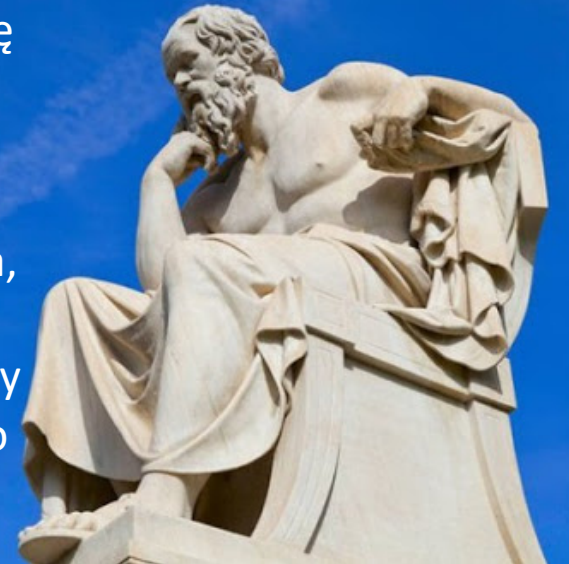
Liczb pierwszych jest dowolnie dużo – zawsze możemy podać jeszcze jedną: $p_1 * p_2 * \dots * p_n + 1$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89

Arystoteles:

nieskończoność potencjalna – jakkolwiek podałyby się liczbę (bądź wielkość geometryczną), to zawsze znajdzie się liczba (wielkość) od niej jeszcze większa.

nieskończoność aktualna – to nieskończoność dokonana, w której możliwość nieskończenia wielu kroków zostaje spełniona, urzeczywistniona w postaci jednego aktu. Typowym dziś jej przykładem jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, traktowany jako jeden obiekt będący końcowym efektem nieskończonego procesu zwiększania liczebności, obiekt wyraźnie określony, mogący być elementem innego zbioru.



Starożytni: *horror infiniti*

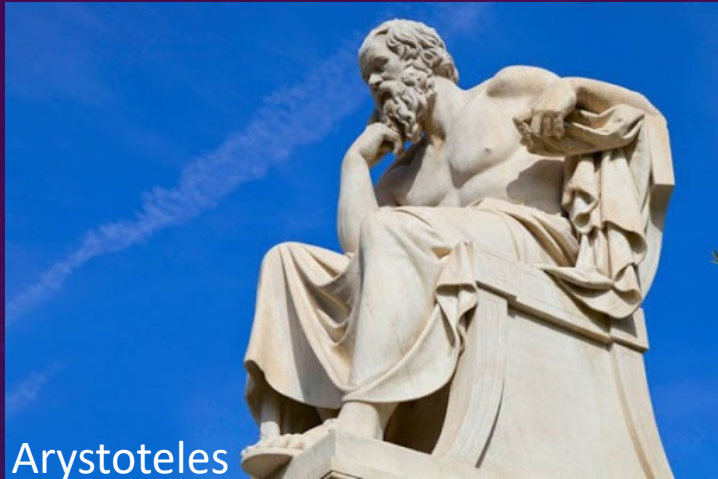
Starożytni nie lubili mówić o nieskończoności (aktualnej), była powodem kłopotów i paradoksów.

Aksjomat: część jest mniejsza od całości

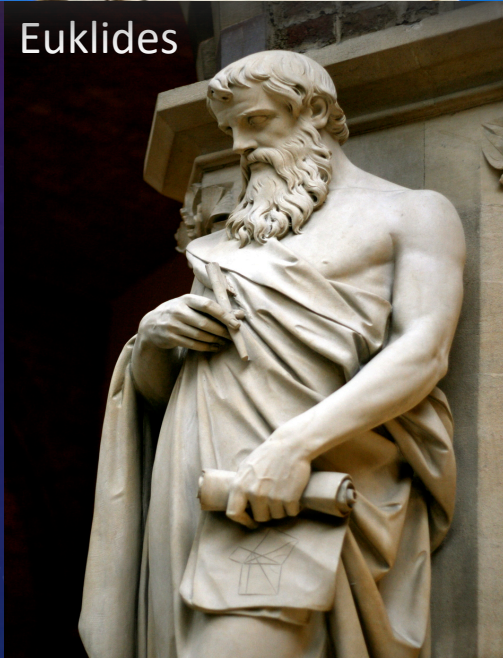
$N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Parz = $0, 2, 4, 6, 8, \dots$

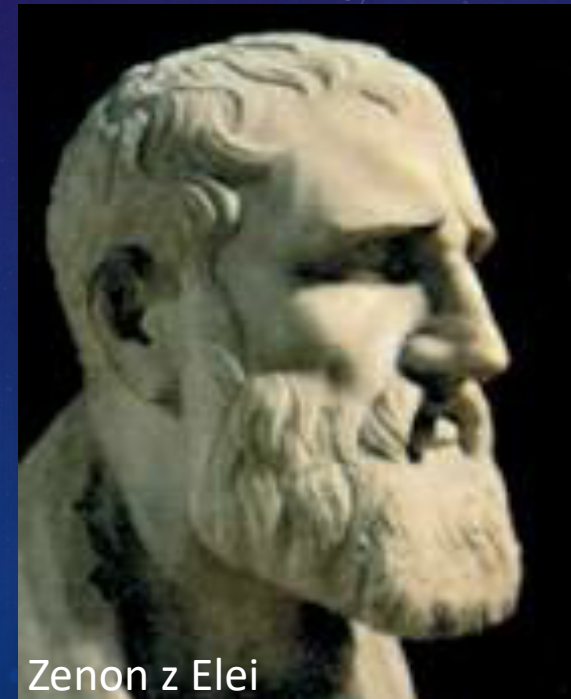
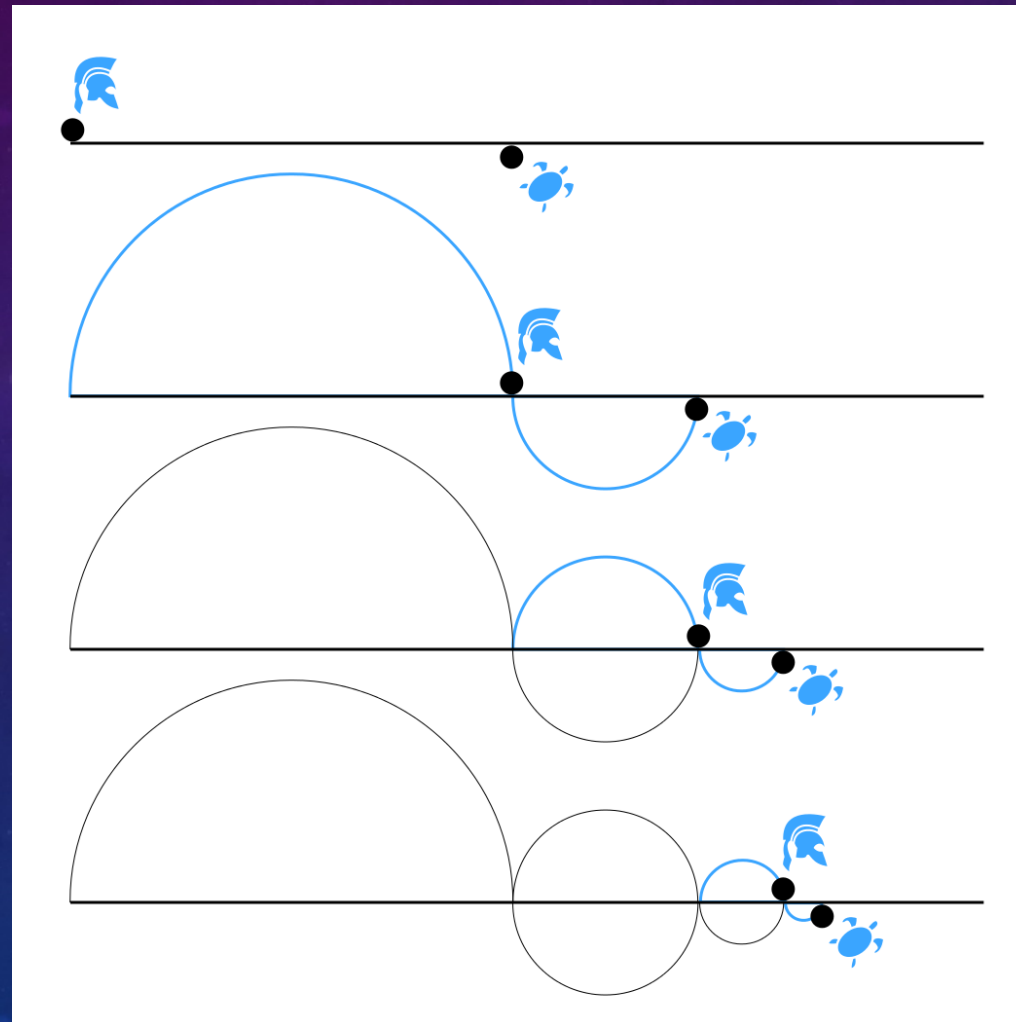
NParz = $1, 3, 5, 7, 9, \dots$



Arystoteles



Euklides



Zenon z Elei

Od starożytnych do XIX wieku:

horror infiniti - cd

Nieskończoność potencjalna ~~≠~~ aktualna

Galileusz, Newton, **Leibniz** (XVI, XVII w.)

*„Nie ma nic bardziej namacalnego niż absurdalność idei liczby **właściwie nieskończonej**.”*

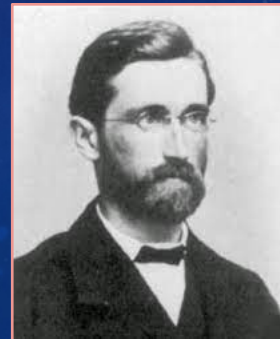
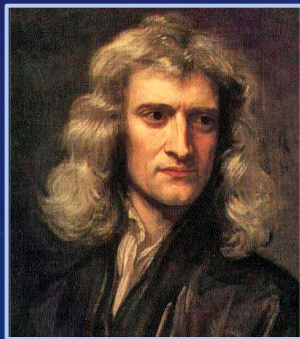
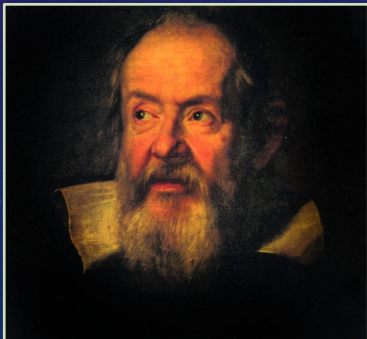
Księża i matematycy, filozofowie, np. Mikołaj z Kuzy (XV w.), Bernard Bolzano (XIX w.)

*„Bóg jest jedyną nieskończonością **aktualną**”* – sakralizacja pojęcia nieskończoności

Ryszard Dedekind (XIX w.) – pierwsza matematyczna definicja zbioru nieskończonego:

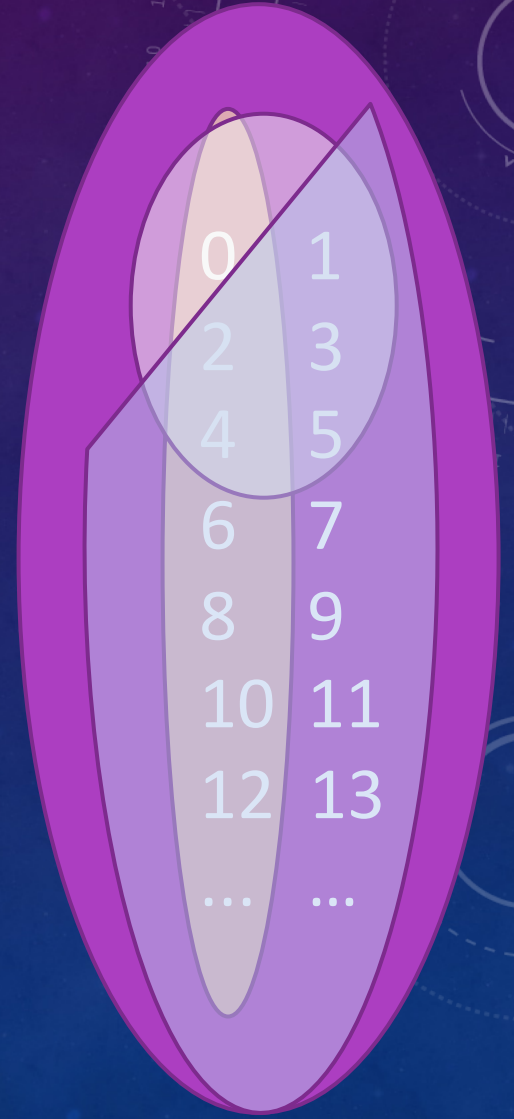
Zbiór nieskończony to taki, który posiada tyle samo elementów, co jakaś jego część

właściwa. - desakralizacja pojęcia nieskończoności (to co było paradoksem, stało się cechą wyróżniającą obiekty nieskończone, tym samym pojęcie nieskończoności aktualnej zostało usankcjonowane)



Nieskończoności

Czy tyle samo elementów?

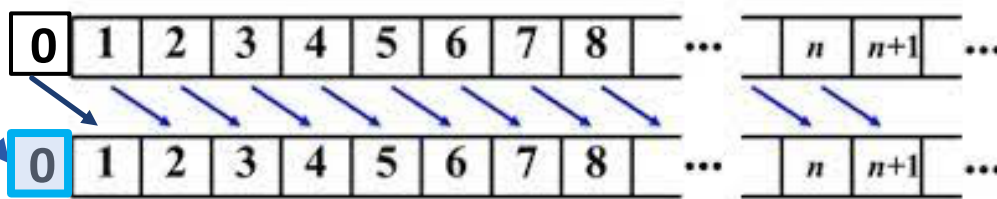
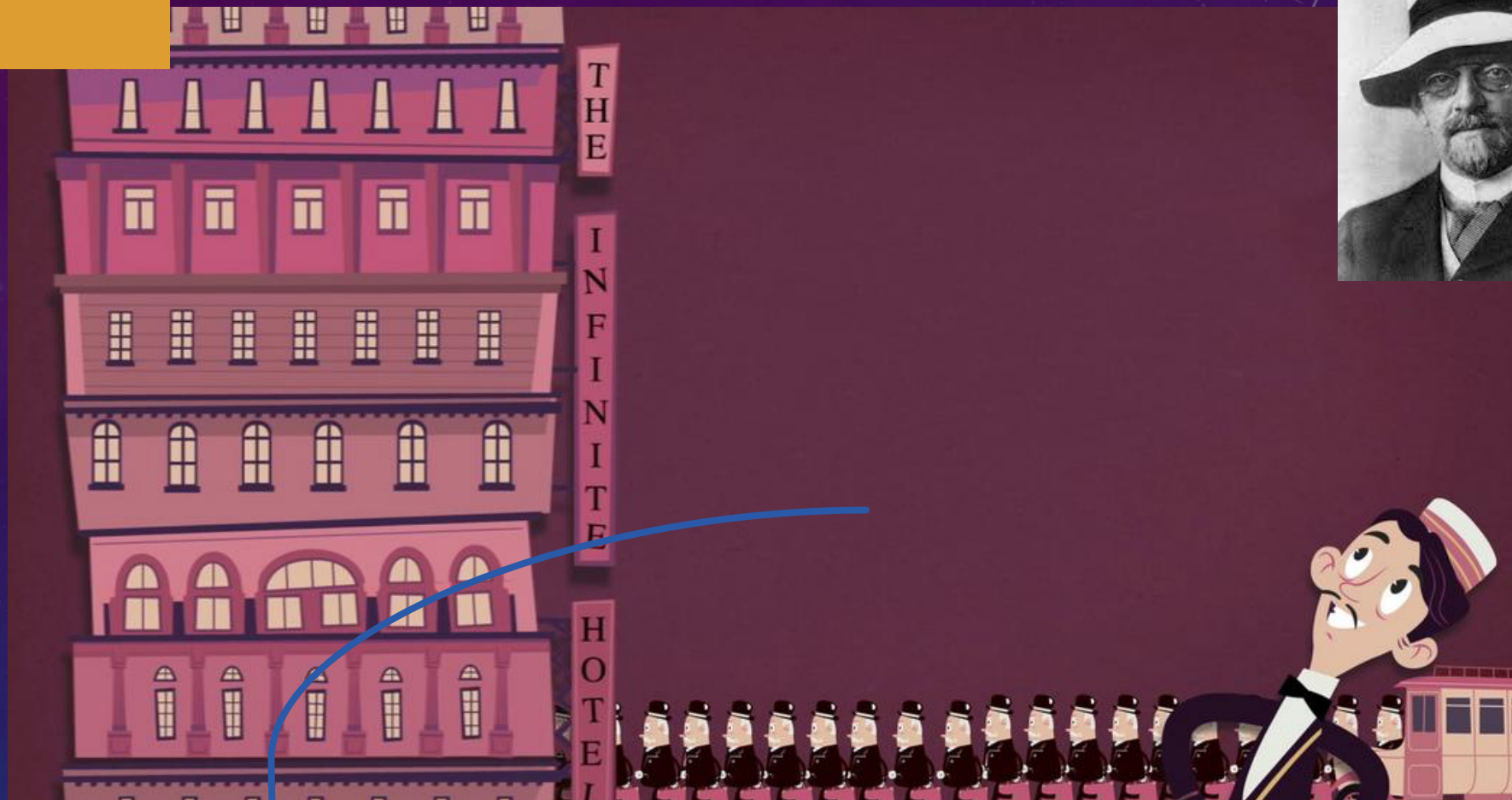


Nieskończoności

Hotel Hilberta

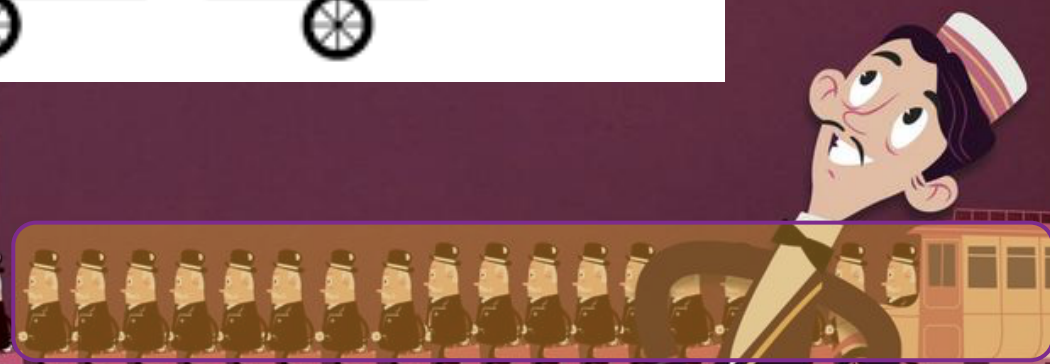
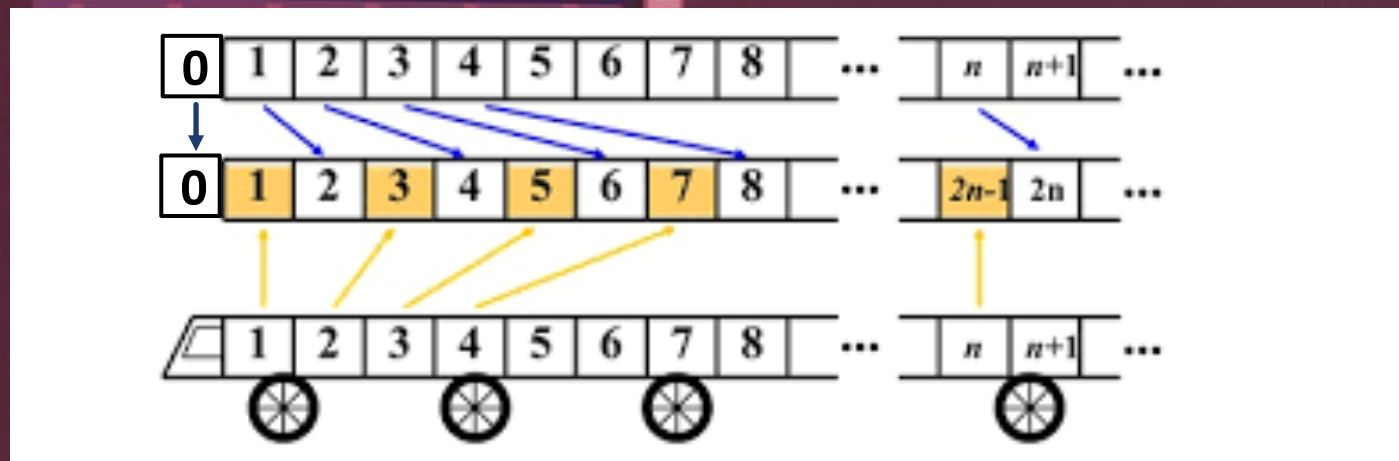
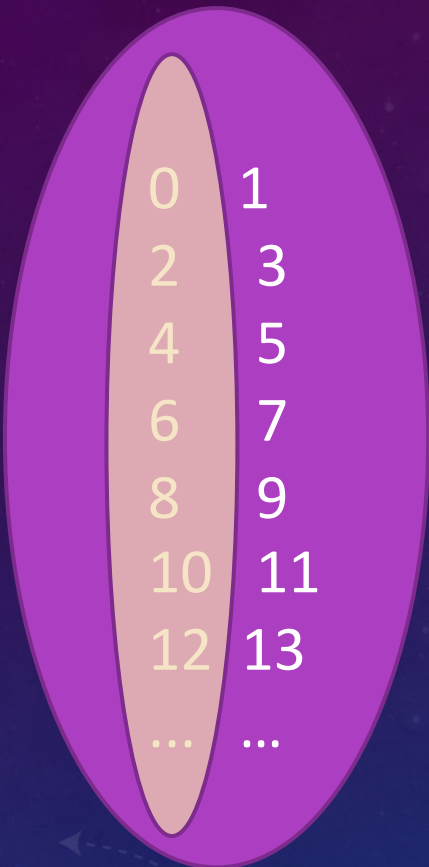


0 1
2 3
4 5
6 7
8 9
10 11
12 13
... ..



Nieskończoności

Hotel Hilberta



Nieskończoności

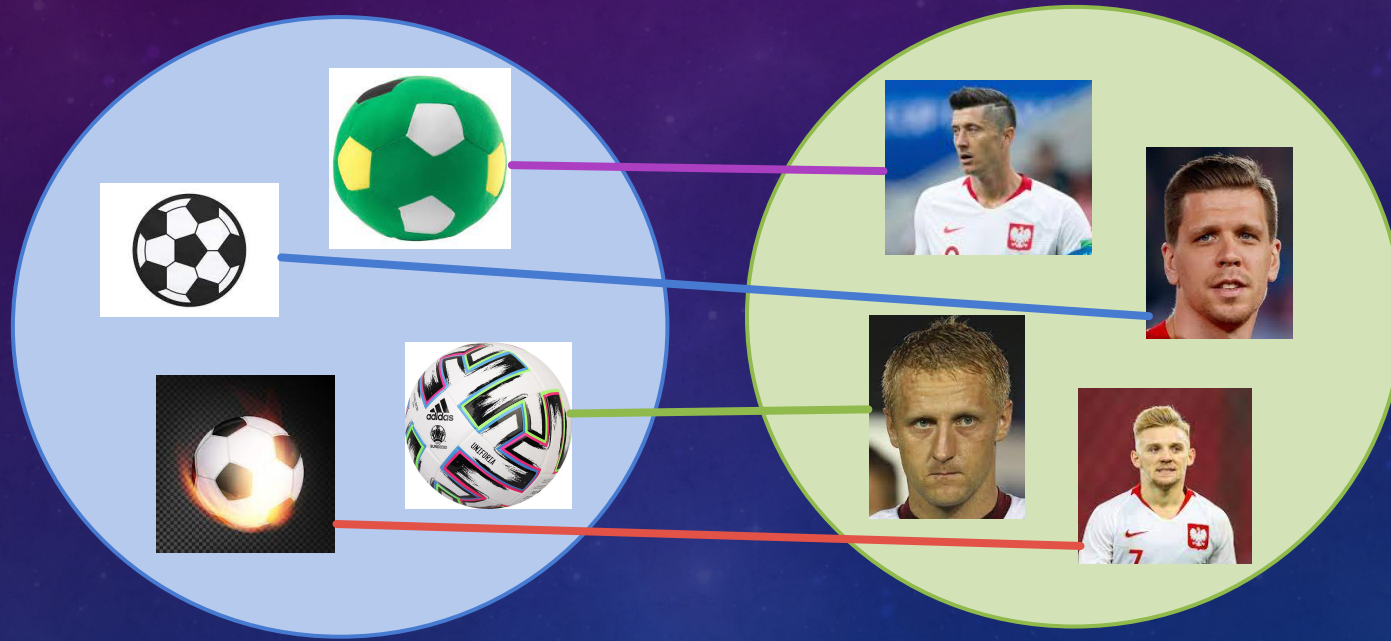
Czy tyle samo elementów?

$N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Parz = $0, 2, 4, 6, 8, \dots$

Pierwsze = $2, 3, 5, 7, 11, \dots$

NParz = $1, 3, 5, 7, 9, \dots$



Dwa zbiory mają tyle samo elementów, jeśli elementy tych zbiorów da się połączyć w pary (wykorzystując wszystkie).

Nieskończoności

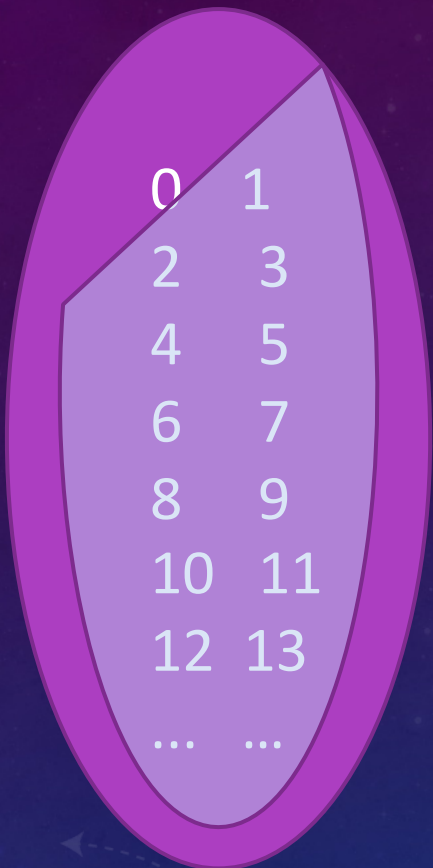
Czy tyle samo elementów?

$N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Parz = 0, 2, 4, 6, 8, ...

Pierwsze = 2, 3, 5, 7, 11, ...

NParz = 1, 3, 5, 7, 9, ...



$N =$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...

$N - \{0\} =$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...

$$f(n) = n + 1$$

Nieskończoności

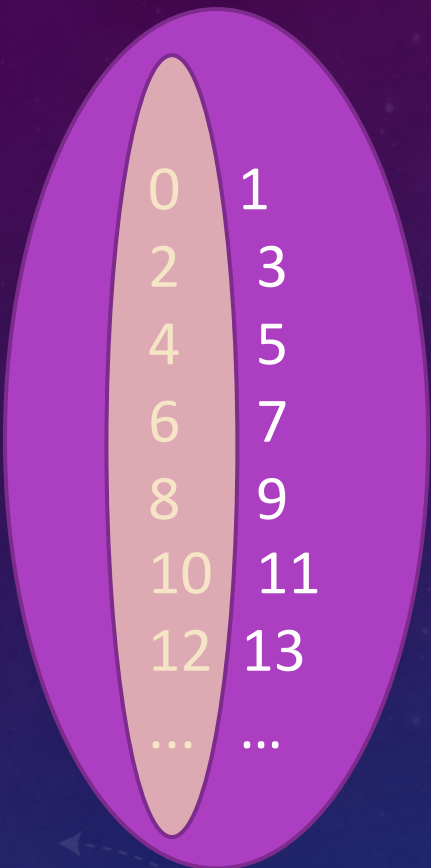
Czy tyle samo elementów?

$N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$\text{Parz} = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$

$\text{Pierwsze} = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$

$\text{NParz} = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$



$N =$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...

$\text{Parz} =$

0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 ...

$$f(n) = 2n$$

Nieskończoności

Czy jest jedna nieskończoność?

$N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Parz = 0, 2, 4, 6, 8, ...

Pierwsze = 2, 3, 5, 7, 11, ...

NParz = 1, 3, 5, 7, 9, ...



$N =$

$x = 0, 2869461575 \dots$

Tej liczby nie ma w żadnej parze =>

Punktów na odcinku jest WIĘCEJ niż liczb naturalnych



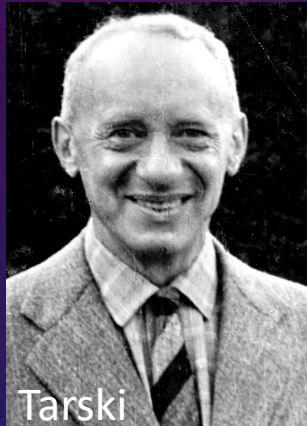
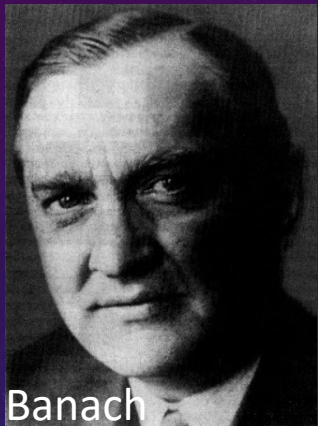
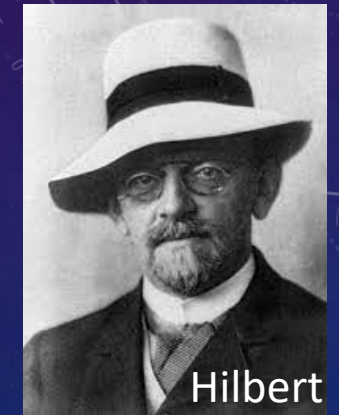
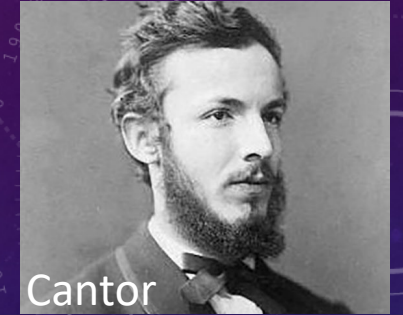
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- ...

1	0,1234325341543624367130986170464319856312051...
2	0,9761493865123786510283561034589163458884685...
3	0,345346467777777777777777777777777777777777777...
4	0,6248674328143691386243864351405238651038535...
5	0,94513971489328965823665555555555555555555555...
6	0,43986524969792672349670000000000000000000000...
7	0,5000...
8	0,1213355426450736508439624309683426043968134...
9	0,431439086190831907509729073127905319075979...
10	0,3523490624098574905734908452092456096490904...
...	...

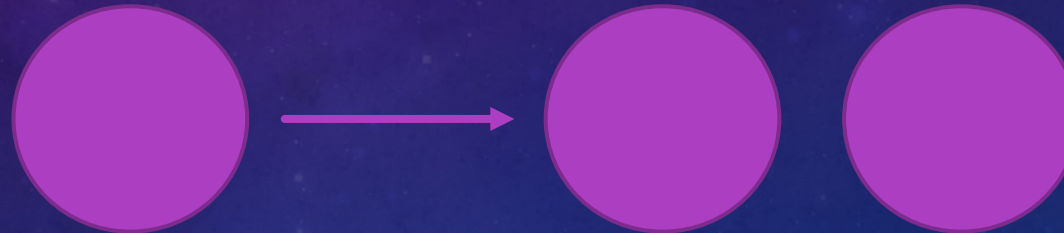
Nieskończoności

Czy jest jedna nieskończoność?

Czy jest coś pomiędzy \aleph_0 a \aleph_1 ? ← HIPOTEZA CONTINUUM



NIE MA "JEDNEJ MATEMATYKI" 😊



- Galileusz, Newton, Leibniz, Poincare:
- „Nie ma nic bardziej namacalnego niż absurdalność idei liczby **właściwie nieskończonej**.” (przed Cantorem)
- „Następne pokolenia potraktują teorię zbiorów jako chorobę, z której udało im się wyleczyć.” (po Cantorze)
- *Pojęcie nienamacalne, którego nie możemy dotknąć, chwycić w rękę, nie jesteśmy nawet pewni, czy istnieje, wykorzystujemy do wnioskowania o rzeczywistości całkiem namacalnej (R, pochodne => wszelkie obliczenia związane z budowaniem, konstruowaniem silników, optymalizowaniem wydajności wszelkiego sprzętu, opisywaniem przemian w przyrodzie). I to nam działa 😊*

- Ks. Heller i prof. Murawski: stąd do nieskończoności
<https://www.youtube.com/watch?v=unspGA8imqc&t=1677s>
- Michał Korch: różne nieskończoności
<https://www.youtube.com/watch?v=zLI1cr09uXw&t=413s>
- Michał Korch: $2+2=5$?
<https://www.youtube.com/watch?v=JAWsmo62KXI>
- Infinity paradoxes
https://www.youtube.com/watch?v=dDI7g_2x74Q
- Paradoks Banacha-Tarskiego o dwóch kulach
<https://www.youtube.com/watch?v=s86-Z-CbaHA&t=706s>